

LAHENDUSED

1. Vastus: 48 minutit.

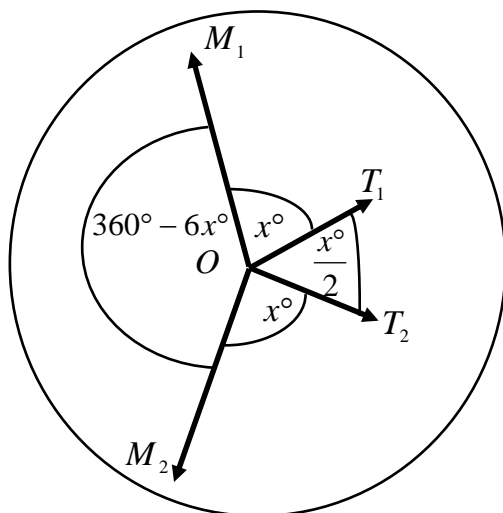
Lahendus. Olgu tunniosuti alg- ja lõppasendi tähisteks T_1 ja T_2 , minutiosuti puhul vastavalt M_1 ja M_2 . Ühe minutiga läbib tunniosuti $\frac{30^\circ}{60} = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ ja minutiosuti $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$.

Et sõiduks kuluv aeg oli väiksem kui 60 minutit, siis on võimalikud vaid kaks juhtu:

- 1) minutiosuti möödub tunniosutist ühel korral;
- 2) minutiosuti ei möödu tunniosutist.

Järgnevalt vaatleme mõlemat juhtu eraldi

1) Minutiosuti möödub tunniosutist ühel korral.



Et x minutiga läbib tunniosuti $\frac{x}{2}$ kraadi ning minutiosuti $6x$ kraadi, siis saame võrrandi

$$x + x + \frac{x}{2} = 6x,$$

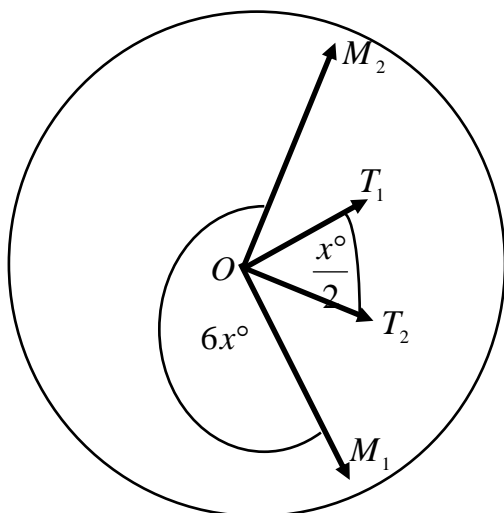
millest

$$3,5x = 0 \quad | :3,5$$

$$x = 0$$

Tulemus on vastuolus ülesande algtingimustega.

2) Minutiosuti ei möödu tunniosutist.



Et $\angle T_1OM_1 = \angle T_2OM_2 = x^\circ$, siis saame võrrandi

$$x + x - \frac{x}{2} = 360 - 6x,$$

millest

$$7,5x = 360 \quad | :7,5$$

$$x = 48$$

2. Vastus: Jah. Ainus sobiv arv on 420112.

Lahendus. Et $308 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 4 \cdot 7 \cdot 11$, siis $\overline{x2011y} : 4$ ning arvestades 4-ga jaguvuse tunnust (*kahest viimasest numbrist moodustatud arv peab jaguma 4-ga*) peab arvu $\overline{x2011y}$ viimane number olema kas 2 või 6. Edasi vaatleme mõlemat juhtumit eraldi.

1) Arv on esitatud kujul $\overline{x20112}$.

Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele (*arvu paaritutel kohtadel asetsevate numbrite summa ja paariskohtadel asetsevate numbrite summa vahe peab jaguma 11-ga*) saame

$$\begin{aligned} & [(x + 0 + 1) - (2 + 1 + 2)] : 11 \\ & (x - 4) : 11 \end{aligned}$$

Et $0 < x \leq 9$, siis

$$x = 4$$

Nüüd kontrollime, kas arv 420112 jagub lisaks ka 7-ga.

$$420112 : 7 = 60016$$

Niisiis arv 420112 rahuldab ülesande tingimusi.

2) Arv on esitatud kujul $\overline{x20116}$.

Vastavalt 11-ga jaguvuse tunnusele saame

$$\begin{aligned} & [(x + 0 + 1) - (2 + 1 + 6)] : 11 \\ & (x - 8) : 11 \end{aligned}$$

Et $0 < x \leq 9$, siis

$$x = 8$$

Kontrollime, kas arv 420112 jagub 7-ga.

$$820116 : 7 = 117159, \text{ jääk } 3.$$

Niisiis arv 820116 ei sobi tingimustega.

3. Vastus: $c^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + a^3 = 0$.

Lahendus. Kui x_1 või x_2 on võrdne nulliga, siis murdusid $\frac{1}{x_1^3}$ ja $\frac{1}{x_2^3}$ ei eksisteeri. Seega eeldame edasises, et $x_1 \neq 0$ ja $x_2 \neq 0$.

Viète'i valemite põhjal $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, mistõttu ka $c \neq 0$.

Seega uue võrrandi lahendite summa on

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}{x_1^3 \cdot x_2^3} =$$

Kasutame asjaolu, et $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2]}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \\ &= \frac{-\frac{b}{a} \cdot \left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \frac{c}{a} \right]}{\left(\frac{c}{a}\right)^3} = \frac{-\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right)}{\frac{c^3}{a^3}} = \frac{3abc - b^3}{c^3} \end{aligned}$$

Uue võrrandi lahendite korrutis

$$\frac{1}{x_1^3} \cdot \frac{1}{x_2^3} = \frac{1}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^3} = \frac{a^3}{c^3}$$

Rakendades Viète'i valemeid saame, et otsitav võrrand on

$$x^2 - \frac{-b^3 + 3abc}{c^3}x + \frac{a^3}{c^3} = 0,$$

millest

$$c^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + a^3 = 0.$$

4. Vastus: 2,4 cm.

Lahendus. Teeme abistava joonise.

Arvutame lõigu EF pikkuse:

$$|EF| = |AF| - |AE| = 1 \text{ cm.}$$

Et

$$\angle AED = \angle CEF$$

ja

$$\angle FCE = \angle ADE,$$

siis $\triangle FCE \sim \triangle ADE$.

Olgu $|DE| = x$ ja $|EC| = y$. Sarnas-
 test kolmnurkadest ADE ja ECF saame

$$\frac{x}{y} = \frac{|AE|}{|EF|} = 3$$

ning

$$x = 3y$$

Täisnurksest kolmnurgast ADE vastavalt Pythagorase teoreemile

$$|AD|^2 + |DE|^2 = |AE|^2,$$

millest asendades $|AD| = 4y$ ja $|DE| = 3y$ saame

$$(4y)^2 + (3y)^2 = 3^2$$

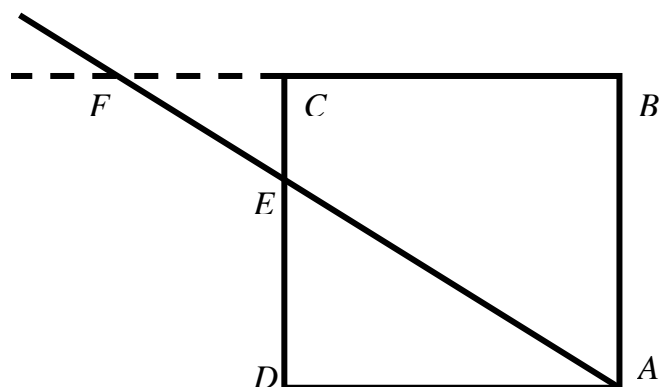
$$16y^2 + 9y^2 = 9$$

$$25y^2 = 9 \quad |:25$$

$$y^2 = \frac{9}{25} \quad |\sqrt{\quad}$$

$$y = 0,6$$

Ruudu küljepikkus $|AD| = 4y = 4 \cdot 0,6 = 2,4$ (cm).



5. Vastus: Ei.

Lahendus.

Kõigis kuhjades olevate nuppude summa $3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=75$ on alghetkel paaritu arv.

Iga käiguga lisatakse juurde või eemaldatakse kokku 6 nuppu. Seega kokku on kuhjades igal hetkel paaritu arv nuppe.

Kui kõigis kuhjades oleks ühepalju nuppe, siis kokku peaks olema $10x$ (x – positiivne täisarv) nuppu, mis on aga paarisarv. Seega niisugune olukord pole võimalik.

HINDAMINE

- | | |
|--|-----------|
| 1. Abistava skeemi või selgituste eest | 1p |
| Selgituse, et võimalikud on kaks juhtu, eest | 1p |
| Esimese juhu (minutiosuti möödub tunniosutist) õige lahenduse eest | 2p |
| Teise juhu (minutiosuti ei möödu tunniosutist) õige lahenduse eest | 3p |
| | 7p |
| | |
| 2. 4-ga jaguvuse kasutamise eest | 2p |
| 11-ga jaguvuse kasutamise eest | 3p |
| Kontrolli (7-ga jagamine) eest | 1p |
| Õige vastuse eest | 1p |
| <u>Märkus</u> Põhjenduseta õige vastuse eest anda 1p. Õpilane võib | 7p |
| 4-ga jaguvuse asemel kasutada ka 2-ga jaguvust. Sellisel juhul peab ta | |
| vaatlema juba viite juhtu. 11-ga jaguvuse kasutamise asemel võib õpilane | |
| uurida ükshaaval juhte $x = 1;2;3;\dots;9$. | |
| | |
| 3. Seoste $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ja $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ eest | 1p |
| Otsitava võrrandi lahendite korrutise avaldamise eest | 1p |
| Otsitava võrrandi lahendite summa avaldamise eest | 4p |
| Lahenduse lõpuleviimise eest | 1p |
| <u>Märkus</u> . Ilmselt saab lahendid ka vahetult avaldada ning leida seejärel | 7p |
| vajalikud suurused. Lahendus tuleb sellisel juhul oluliselt töömahukam. | |
| Õige alternatiivse lahenduse eest anda igal juhul 7p. | |
| | |
| 4. Korrektse abijoonise eest | 1p |
| Lõigu EF leidmise eest | 1p |
| Kolmnurkade FCE ja ADE sarnasuse näitamise eest | 2p |
| Ruudu küljepikkuse leidmise eest | 3p |
| <u>Märkus</u> . Lõigu pikkust ei pea tähistama püstkriipsude abil. | 7p |
| | |
| 5. Nuppude koguarvu leidmise eest | 1p |
| Selgituse, et nuppude arv on igal käigul paaritu arv, eest | 2p |
| Lahenduse lõpuleviimise eest | 4p |
| <u>Märkus</u> . Ainult õige vastuse eest punkte mitte panna. | 7p |